p進体上の多様体の0サイクルについて

佐藤, 周友

代数幾何学シンポジウム記録
2010年度 pp.28-39

p進体上の多様体の0サイクルについて

佐藤 周友 (名大多元数理)

目 次

1 サイクルの有限性の問題

X を体 k 上幾何的に連結なスムーズ多様体とする. X の r 次元閉部分多様体全体のなす集合を X_r で表し, 集合 X_r が生成する自由アーベル群 $\mathbb{Z}[X_r]$ を r サイクルの群とよび, $\mathsf{Z}_r(X)$ と表す. X の r サイクルの Chow 群 $\mathsf{CH}_r(X)$ を次のように定義する:

$$\mathsf{CH}_r(X) := \mathsf{Z}_r(X)/\mathsf{Z}_r(X)_{\mathsf{rat}}.$$

ここで $\mathsf{Z}_r(X)_{\mathsf{rat}}$ は $r+1$ 次元閉部分多様体上の有理関数の因子であるような r サイクルたちが生成する部分群を表し, $\mathsf{Z}_r(X)_{\mathsf{rat}}$ の元は 0 に有理同値な r サイクルとよばれる. Chow 群の次数付けはサイクルの余次元によってなされることも多い:

$$\mathsf{CH}^r(X) := \mathsf{CH}_{\mathsf{dim}(X)-r}(X).$$

これを余次元 r のサイクルの Chow 群とよぶ. 次の事実は基本的である:

(1) チャウ群は余次元で次数を付けるとスムーズ多様体の間の任意の射に関して反変関手的であり, 次元で次数を付けると固有的な射に関して共変関手的である. (Chow [Ch], Fulton [Fu1], [Fu2])

(2) 余次元 1 のサイクルの Chow 群 $\mathsf{CH}^1(X)$ は因子類群であり, Picard 群 $\mathsf{Pic}(X)$ と標準同型である. さらに X が k 上射影的な場合, X の Picard 多様体を $\underline{\mathsf{Pic}}^0_X$ で表すと, 0 に代数同値なサイクル ([Fu2] §10.3) で生成される $\mathsf{CH}^1(X)$ の部分群は $\underline{\mathsf{Pic}}^0_X(k)$ の指数有限な部分群に対応する.

1

(3) k が代数体の場合は, $\mathsf{CH}^1(X)$ は有限生成アーベル群である. (Néron-Severi 群の有限生成性と Mordell-Weil の定理の帰結)

1973 年に (3) を一般化する形で, 次の予想が提起された.

予想 1 (Bass [Ba]) k が代数体ならば, $\mathsf{CH}^r(X)$ は各 r に対して有限生成である.

以下では $\underline{X \text{ は完備 } (:= k \text{ 上固有的}), \mathsf{dim}(X) \geq 2 \text{ かつ } X(k) \neq \emptyset}$ であると仮定する. 次数 0 の 0 サイクルのなす $\mathsf{CH}_0(X)$ の部分群 $\mathsf{A}_0(X)$ を考えると, Albanese 写像とよばれる標準写像がある:

$$\mathsf{alb}_X : \mathsf{A}_0(X) \longrightarrow \underline{\mathsf{Alb}}_X(k) \qquad (\underline{\mathsf{Alb}}_X \text{ は Albanese 多様体}).$$

k が代数体の場合, 右辺は有限生成であるので, 予想 1 の本質的な問題は alb_X の核

$$\mathsf{T}(X) := \mathsf{Ker}(\mathsf{alb}_X)$$

の有限生成性である. この部分は体 k によって大きく様子が異なり, 一筋縄では捉えられない. 実際, 次の事実が分かっている. X の幾何種数と小平次元をそれぞれ p_g と κ_X で表す.

(4) $k = \mathbb{C}$, $\mathsf{dim}(X) = 2$ かつ $p_g > 0$ ならば $\mathsf{T}(X)$ は有限次元スキームでは表現できない (巨大な) 群である (Mumford [Mu], 1968 年).

(5) $k = \mathbb{C}$, $\mathsf{dim}(X) = 2$, $p_g = 0$ かつ $\kappa_X \leq 1$ ならば $\mathsf{T}(X) = 0$ である (Bloch-Kas-Lieberman [BKL], 1976 年).

(6) k が有限体ならば $\mathsf{T}(X)$ は位数有限である (Kato-Saito [KS], 1983 年).

1985 年に Beilinson は次のことを予想した.

予想 2 (Beilinson [Be]) k が代数体ならば, $\mathsf{T}(X)$ は捩れ群である.

予想 1 と 2 を合わせると, 「k が代数体ならば $\mathsf{T}(X)$ は位数有限」でなければならないが, 現在までに知られているのは次の事実だけである.

(7) k が代数体, $\mathsf{dim}(X) = 2$ かつ, ある埋め込み $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関して $\mathsf{T}(X_{\mathbb{C}}) = 0$ ならば $\mathsf{T}(X)$ は位数有限である (Colliot-Thélène–Raskind [CTR], 1991 年).

本稿の主題は k が p 進体 ($\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体) の場合の $\mathsf{T}(X)$ の構造である. この場合には, 1990 年代に専門家の間で次のことが予想された.

予想 3 (予想 2 の類似) k が p 進体ならば, $\mathsf{T}(X)$ は有限群と可除群の直和である.

この予想に関しては (7) の類似として次の場合が知られている.

(8) k が p 進体, $\mathrm{dim}(X) = 2$ かつ, ある埋め込み $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関して $\mathsf{T}(X_{\mathbb{C}}) = 0$ ならば $\mathsf{T}(X)$ は位数有限である (Colliot-Thélène–Raskind [CTR], 1991 年).

本稿の主結果は予想 3 を弱めた次の定理 1 である. 素数 p とアーベル群 M が与えられたとき, M が **p' 可除である**とは, p と素な任意の自然数 n について $M \otimes \mathbb{Z}/n = 0$ であることをいう. またアーベル群 M が**指数有限である**とは, n 倍写像 $M \to M$ が零写像であるような自然数 n が存在することをいう.

定理 1 (齋藤・佐藤 [SS2]) X を p 進体 k 上のスムーズ完備多様体とし, $X(k) \neq \emptyset$ を仮定する. このとき $\mathsf{A}_0(X)$ と $\mathsf{T}(X)$ はどちらも指数有限群と p' 可除群の直和である.[1]

X が曲線の積である場合は, Raskind, Spiess [RS] と山崎 [Y] が p 進的な構造を含めて $\mathsf{A}_0(X)$ を詳しく計算している.

記号と約束. 本文で用いる記号と約束は以下の通りである.

- 体 F の分離閉包を $\overline{F}$ で表す.
- スキームのコホモロジーはすべてエタールコホモロジーである. スキーム X 上の小エタール景 (small étale site) を $X_{\text{ét}}$ で表す.
- スキーム X 上で可逆な自然数 n に対して, 1 の n 乗根のなす $X_{\text{ét}}$ 上の層を μ_n で表す.

2 定理 1 の証明の概略

p 進体 k の整数環を $\mathfrak{o}$ で表し, $\mathfrak{o}$ の剰余体を $\mathbb{F}$ で表す. $\mathfrak{o}$ 上のスキーム Z に対して

$$Z_s := Z \otimes_{\mathfrak{o}} \mathbb{F}$$

という記号をしばしば用いる. de Jong の alteration 定理 [dJ] と Chow 群の関手性を用いた簡単な議論により, 定理 1 は X が半安定環元 (semistable reduction) を持つ場合に帰着される. 以下ではこの条件より弱い, 次の条件 (N) をみたすような X の正則モデル $\mathscr{X}$ が存在する場合に定理 1 の証明の概略を述べる:

[1] Mattuck の定理 [Ma] により, $\underline{\mathsf{Alb}}_X(k)$ は $\mathbb{Z}_p$ の有限直和を指数有限な部分群として含むから有限群と p' 可除群の直和である. したがって $\mathsf{T}(X)$ に関する定理 1 の主張と $\mathsf{A}_0(X)$ に関する定理 1 の主張は互いに同値である ([SS1] 補題 2.3.2 (3) 参照). また, $X(k) \neq \emptyset$ という仮定がなくても, $\mathsf{A}_0(X)$ が指数有限群と p' 可除群の直和であるという主張は正しい (以下の定理 1 の証明を見よ).

(N) $\mathscr{X}$ は $\mathfrak{o}$ 上射影的かつ平坦であり, $\mathscr{X}_s$ に被約な閉部分スキーム構造を与えた $(\mathscr{X}_s)_{\mathsf{red}}$ は $\mathscr{X}$ 上の単純正規交叉因子である.

次の定理が定理 1 を証明する鍵である.

定理 2 (齋藤・佐藤 [SS2]) $\mathscr{X}$ を条件 (N) をみたす $\mathfrak{o}$ 上の正則スキームとし, ℓ を p と異なる素数とする. このとき $\mathscr{X}$ のサイクル写像

$$\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n} : \mathsf{CH}_1(\mathscr{X})/\ell^n \longrightarrow H^{2d}(\mathscr{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \qquad (n \geq 1)$$

は全単射である. ただし d は $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(\mathfrak{o})$ のファイバーの次元を表す.

ここで考えているサイクル写像は Gabber の絶対純粋性 [FG] によって定義されるものである. また $\mathscr{X}$ は $d+1$ 次元だから, $\mathsf{CH}_1(\mathscr{X}) = \mathsf{CH}^d(\mathscr{X})$ であることに注意しておく. 定理 2 の証明, および定理 2 から定理 1 を導く過程では次の 2 つの補題が重要である:

補題 3 ([SS2] Theorem 4.2) $\mathscr{X}$ は条件 (N) をみたす $\mathfrak{o}$ 上のスキームとする. このとき

(1) 次の条件 (N^+) をみたす超曲面切断 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ が存在する:

(N^+) $\mathscr{Y}$ は (N) をみたし, $\mathscr{Y} \cup (\mathscr{X}_s)_{\mathsf{red}}$ は $\mathscr{X}$ 上の単純正規交叉因子である.

(2) ((1) の精密化) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ を $(\mathscr{X}_s)_{\mathsf{red}}$ の既約成分とする. $1 \leq a \leq d$ かつ $1 \leq i_1 < \cdots < i_a \leq r$ であるような整数の組 $(a, i_1, \ldots, i_a)$ に対して

$$Y_{i_1,\ldots,i_a} := Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_a}$$

とおく. 次の 3 条件をみたす閉部分スキーム $W \subset \mathscr{X}$ を考える.

(i) W は正則な整スキーム $W_1, \ldots, W_m$ の直和 (非交和) である.

(ii) $1 \leq a \leq d$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_a \leq r$ かつ $1 \leq \nu \leq m$ であるような整数の組 $(a, i_1, \ldots, i_a, \nu)$ に対して, $W_\nu \not\subset Y_{i_1,\ldots,i_a}$ ならば $W_\nu \times_X Y_{i_1,\ldots,i_a}$ は空集合であるか, または正則かつ $\mathsf{dim}(W_\nu \times_X Y_{i_1,\ldots,i_a}) < \frac{1}{2}\mathsf{dim}(Y_{i_1,\ldots,i_a})$ である.

(iii) $1 \leq a \leq d$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_a \leq r$ かつ $1 \leq \nu \leq m$ であるような整数の組 $(a, i_1, \ldots, i_a, \nu)$ に対して, $W_\nu \subset Y_{i_1,\ldots,i_a}$ ならば $\mathsf{dim}(W_\nu) < \frac{1}{2}\mathsf{dim}(Y_{i_1,\ldots,i_a})$ である.

このとき W を含み, (N^+) をみたすような超曲面切断 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ が存在する.

補題 4 ([SS2] Theorem 3.2) $\mathscr{X}$ は条件 (N) をみたす $\mathfrak{o}$ 上のスキームとし, $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ は (N^+) をみたす超平面切断とする. ℓ は $\mathfrak{o}$ で可逆な素数とする. このとき

(1) $q \geq d+2$ に対して $H^q(\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) = 0$ である.

(2) $H^{d+1}(\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(d)) = 0$ である.

補足 5 Artin-Gabber のアフィン Lefschetz 定理 ([FG] §5) は, $\mathfrak{o}$ 上相対次元 d であるような正則アフィンスキーム $\mathscr{U}$ と $q \geq d+3$ に対して

$$H^q(\mathscr{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) = 0$$

であることを主張しているが, 補題 4 は条件 (N^+) の下でこれよりも強い消滅が起きることを主張している.

'定理 2 ⇒ 定理 1' の証明. X を定理 1 の通りとし, X は条件 (N) をみたすような $\mathfrak{o}$ 上のモデル $\mathscr{X}$ を持つと仮定する. 定理 2 から次の命題を示す:

(†) $\mathsf{A}_0(X) \widehat{\otimes} \mathbb{Z}_\ell := \varprojlim_{n \geq 1} \mathsf{A}_0(X)/\ell^n$ は, 任意の素数 $\ell \neq p$ に対して位数有限であり, 殆どすべての $\ell \neq p$ に対して自明である.

この命題は次の命題と同値であることに注意しておく:

(†′) $\mathsf{CH}_0(X) \widehat{\otimes} \mathbb{Z}_\ell := \varprojlim_{n \geq 1} \mathsf{CH}_0(X)/\ell^n$ は, 任意の素数 $\ell \neq p$ に対して $\mathbb{Z}_\ell$ と有限群の直和に同型であり, 殆どすべての $\ell \neq p$ に対して $\mathbb{Z}_\ell$ に同型である.

定理 1 は命題 (†) と逆極限に関する一般的な事実 ([JS] Lemma 7.7 参照) の帰結である.

(†) と (†′) の証明. (†′) を $d = \mathsf{dim}(X) \geq 1$ に関する帰納法で示す.

$d = 1$ の場合, X の Jacobi 多様体を $\underline{\mathsf{Jac}}_X$ で表すと, (†) は同型 $\mathsf{A}_0(X) \simeq \underline{\mathsf{Jac}}_X(k)$ および Mattuck の定理 [Ma] から正しい (よって (†′) も正しい).

$d \geq 2$ の場合, 仮定から条件 (N) をみたすような X の $\mathfrak{o}$ 上のモデル $\mathscr{X}$ を 1 つ取る. 補題 3 (1) から, 条件 (N^+) をみたすような超曲面切断 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ が存在する. $Y := \mathscr{Y} \otimes_{\mathfrak{o}} k$ とおき, $\iota : \mathscr{Y} \hookrightarrow \mathscr{X}$ と $i : Y \hookrightarrow X$ をそれぞれ自然な閉埋め込みとする. ℓ を p と異なる素数とし, 次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{CH}_1(\mathscr{Y})/\ell^n \arrow[r, two heads, "\text{pull-back}"] \arrow[d, "\iota_*"'] & \mathsf{CH}_0(Y)/\ell^n \arrow[d, "i_*"] \\ \mathsf{CH}_1(\mathscr{X})/\ell^n \arrow[r, two heads, "\text{pull-back}"] & \mathsf{CH}_0(X)/\ell^n \end{tikzcd}$$

定理 2 によりこの図式の群はすべて位数有限であるから, i_* が全射ならば d に関する帰納法が成立する. i_* の全射性を示すには ι_* の全射性を示せばよい. そこで次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{CH}_1(\mathscr{Y})/\ell^n \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, "\mathsf{cl}_{\mathscr{Y},\ell^n}"', "\wr"] & \mathsf{CH}_1(\mathscr{X})/\ell^n \arrow[d, "\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}"', "\wr"] & \\ H^{2d-2}(\mathscr{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d-1}) \arrow[r, "\iota_*"] & H^{2d}(\mathscr{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \arrow[r] & H^{2d}(\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \end{tikzcd} \qquad \text{(exact).}$$

5

ここで縦の矢印はサイクル写像であり, 定理 2 によって全単射である. 下側の系列はエタールコホモロジーの局所化完全系列であり, 最後の項は補題 4 (1) から 0 である ($d \geq 2$ に注意). よって下側の ι_* は全射であるから, 上側の ι_* も全射である. 以上により, 定理 2 を仮定して (†) と (†′) が証明された (すなわち定理 1 が得られた). □

以下では定理 2 の証明の概略について説明する.

定理 2 の証明の概略. $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ の全射性は (†′) の証明と同様の議論 (補題 3 (1) と補題 4 (1) を用いた議論) によって $d=1$ の場合に帰着される. $d=1$ の場合は Brauer 群に関する Artin の底変換定理と有限体上の曲線の Hasse 原理によって $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ の全射性が比較的容易に分かる ([SS2] §5 を参照).

以下では $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ の単射性の証明について述べる. サイクル写像 $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ の $n \geq 1$ に関する帰納極限

$$\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^\infty} : \mathsf{CH}_1(\mathscr{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^{2d}(\mathscr{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(d))$$

を考える. $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ の単射性は次の 3 段階で証明される:

Step 1. $d=2$ の場合に $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^\infty}$ が単射であることを示す.

Step 2. $d=2$ の場合に $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ が単射であることを示す.

Step 3. $d \geq 3$ の場合に $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ が単射であることを示す.

以下では Step 1 と Step 2 のみ説明する. Step 3 は Step 1 と同様の議論によって得られるので省略する ([SS2] §8 を参照).

Step 1. $\mathsf{CH}_1(\mathscr{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ の元 $\alpha = \sum_{i=1}^r [C_i] \otimes \lambda_i$ を固定し, $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^\infty}(\alpha) = 0$ を仮定する. ただし各 C_i は $\mathscr{X}$ 上の 1 次元閉部分整スキームであり, 各 λ_i は $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ の元である. 状況を分かりやすくするため, まず次のような '非常に都合のよい' 仮定を付け加える:

($\star$) すべての C_i を含み, 補題 3 の条件 (N^+) をみたすような超曲面切断 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ が存在する.

この仮定の下で $\iota : \mathscr{Y} \hookrightarrow \mathscr{X}$ を自然な閉埋め込み射とし, 次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{CH}_1(\mathscr{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, hook, "\mathsf{cl}_{\mathscr{Y},\ell^n}"'] & \mathsf{CH}_1(\mathscr{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[d, "\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}"'] \\ H^3(\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[r] & H^2(\mathscr{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) \arrow[r, "\iota_*"] & H^4(\mathscr{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \end{tikzcd} \quad \text{(exact)}.$$

ここで $\mathsf{cl}_{\mathscr{Y},\ell^n}$ の単射性は同型 $\mathsf{CH}_1(\mathscr{Y}) \simeq \mathsf{Pic}(\mathscr{Y})$ と $\mathbb{G}_\mathsf{m}$ の Kummer 理論による. 下側の系列はエタールコホモロジーの局所化完全系列であり, 最初の項は $\mathscr{Y}$ に関する仮

6

定と補題 4 (1) から 0 である. よって下側の ι_* は単射であり, 一方 $\mathscr{Y}$ がすべての C_i を含むことから, α は

$$\alpha = \iota_*(\beta) \qquad (\beta \in \mathsf{CH}_1(\mathscr{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

の形で表される. これらの事実と仮定 $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^\infty}(\alpha) = 0$ から $\beta = 0$ であり, ゆえに $\alpha = 0$ である. よって仮定 $(\star)$ の下で $\alpha = 0$ が示された.

仮定 $(\star)$ なしで $\alpha = 0$ を示すには, 以下のようにする. まず初等的な移動の議論 ([SS2] §7 を参照) によって C_i 達を $\mathfrak{o}$ 上平坦なものに取り換える. 次に C_i たちの特異点を閉点に沿ったブローアップの列

$$\mathscr{X}' = \mathscr{X}_m \longrightarrow \mathscr{X}_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathscr{X}_1 \longrightarrow \mathscr{X}_0 = \mathscr{X}$$

によって還元する. これらのスキームはすべて条件 (N) をみたすことに注意しよう. C_i の強変換 $\widetilde{C}_i \subset \mathscr{X}'$ を用いて

$$\alpha' := \sum_{i=1}^{r} [\widetilde{C}_i] \otimes \lambda_i \in \mathsf{CH}_1(\mathscr{X}') \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$$

というサイクルを考える. 補題 3 (2) によって $\widetilde{C}_i$ たちをすべて含み, 条件 (N^+) をみたすような超曲面切断 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}'$ が存在する. $E_1, E_2, \ldots, E_b$ を $(\mathscr{X}_s')_{\mathsf{red}}$ の既約成分で $(\mathscr{X}_s)_{\mathsf{red}}$ の既約成分に対応しないものとし, $W_j := E_j \cap \mathscr{Y}$ と定める. $\mathsf{dim}(\mathscr{X}') = 3$ なので, $W_1, W_2, \ldots, W_b$ は $\mathscr{Y}$ 上の空でない正則な 1 次元閉部分スキームである. このとき仮定 $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^\infty}(\alpha) = 0$ (必ずしも $\mathsf{cl}_{\mathscr{X}',\ell^\infty}(\alpha') = 0$ ではない) と '$(\star)$ の場合と同様の議論' によって

$$\alpha' = \sum_{j=1}^{b} [W_j] \otimes \lambda_j' \in \mathsf{CH}_1(\mathscr{X}') \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \qquad (\lambda_j' \in \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

と表され, ここから

$$\alpha = \pi_*(\alpha') = 0 \qquad (\pi : \mathscr{X}' \to \mathscr{X})$$

が得られる (詳細は [SS2] §8 を参照). 以上で Step 1 が完了する.

Step 2. 補題 3 (1) によって条件 (N^+) をみたすような超曲面切断 $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ をとり, 次の完全系列の可換図式を考える:

$$\begin{CD}
\mathsf{CH}_1(\mathscr{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell @>{\iota_*}>> \mathsf{CH}_1(\mathscr{X}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell @>>> \mathsf{CH}^2(\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell @>>> 0 \\
@V{\mathsf{cl}_{\mathscr{Y},\ell^\infty}}V{\wr}V @V{\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^\infty}}VV @V{\mathsf{cl}_{\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y},\ell^\infty}}VV \\
H^2(\mathscr{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) @>{\iota_*}>> H^4(\mathscr{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) @>>> H^4(\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).
\end{CD}$$

7

上下の列はそれぞれChow群とエタールコホモロジーの局所化完全系列である. $\mathsf{cl}_{\mathscr{Y},\ell^\infty}$ が全単射, かつ $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^\infty}$ がステップ1によって単射であるから, $\mathsf{cl}_{\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y},\ell^\infty}$ は単射である. 一方, 補題4 (1) から $H^4(\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))=0$ なので, $\mathsf{cl}_{\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y},\ell^\infty}$ の単射性と合わせて

$$\mathsf{CH}^2(\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y})\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell=0 \tag{2.1}$$

である. ここで次の一般的な補題を用いる:

補題 6 ([SS2] Lemma 8.7) Z を有限次元, ネーターかつ正則な整スキームとし, ℓ を Z 上可逆な素数とする. このとき次の完全系列が存在する:

$$H^3(Z,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})\longrightarrow \mathsf{U}(Z,\ell^n)\longrightarrow \mathsf{CH}^2(Z)/\ell^n \xrightarrow{\mathsf{cl}_{Z,\ell^n}} H^4(Z,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

ただし $\mathsf{U}(Z,\ell^n)$ は次で定義される Z の**不分岐コホモロジー群**である:

$$\mathsf{U}(Z,\ell^n):=\mathsf{Ker}\left(\partial: H^3(\eta,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})\to\bigoplus\nolimits_{x\in Z^1}H^2(x,\mu_{\ell^n})\right).$$

右辺の η は Z の生成点を表し, ∂ はガロアコホモロジーの境界写像を表す.

補題6から次の完全系列が存在する ($\mathsf{U}(Z,\ell^\infty):=\varinjlim_{n\geq 1}\mathsf{U}(Z,\ell^n)$):

$$H^3(\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))\longrightarrow\mathsf{U}(\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y},\ell^\infty)\longrightarrow\mathsf{CH}^2(\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y})\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell.$$

補題4 (2) によってこの系列の最初の群は 0 であり, (2.1) によって最後の群も 0 だから $\mathsf{U}(\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y},\ell^\infty)=0$, ゆえに

$$\mathsf{U}(\mathscr{X},\ell^\infty)\subset\mathsf{U}(\mathscr{X}\smallsetminus\mathscr{Y},\ell^\infty)=0,$$

すなわち $\mathsf{U}(\mathscr{X},\ell^\infty)=0$ である. さらにMerkur'ev-Suslinの定理 [MS] によって

$$\mathsf{U}(\mathscr{X},\ell^n)\subset\mathsf{U}(\mathscr{X},\ell^\infty)\qquad\text{([SS2] Lemma 8.8)}$$

なので $\mathsf{U}(\mathscr{X},\ell^n)=0$. したがって再び補題6から $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ は単射であり, Step 2が完了する. □

以上で定理2の証明の概略を終了する.

3 応用

ここでは定理2の帰結を2つ挙げる. その他にも定理2は論文 [AS] において重要な役割を果たしていることを述べておく. $k,\mathfrak{o},\mathbb{F}$ は前節の通りとする.

系 7 $\mathscr{X}$ を $\mathfrak{o}$ 上スムーズかつ射影的な整スキームとし,

$$X := \mathscr{X} \otimes_{\mathfrak{o}} k, \qquad Y := \mathscr{X} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathbb{F}$$

とおく. $j : X \hookrightarrow \mathscr{X}$ と $i : Y \hookrightarrow \mathscr{X}$ をそれぞれ標準的な埋め込み射とする. このとき $\mathfrak{o}$ で可逆な素数 ℓ に対して, 引き戻し写像

$$\mathsf{CH}_0(X)/\ell^n \xleftarrow{j^*} \mathsf{CH}_1(X)/\ell^n \xrightarrow{i^*} \mathsf{CH}_0(Y)/\ell^n$$

はいずれも全単射である.

証明. 次の可換図式を考える ($d := \mathsf{dim}(X) = \mathsf{dim}(Y)$):

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{CH}_0(X)/\ell^n \arrow[d, "\mathsf{cl}_{X,\ell^n}"'] & \mathsf{CH}_1(\mathscr{X})/\ell^n \arrow[l, two heads, "j^*"'] \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}"', "\wr"] & \mathsf{CH}_0(Y)/\ell^n \arrow[d, "\mathsf{cl}_{Y,\ell^n}"', "\wr"] \\
H^{2d}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) & H^{2d}(\mathscr{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \arrow[l, hook', "j^*"'] \arrow[r, "i^*", "\sim"'] & H^{2d}(Y, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}).
\end{tikzcd}$$

ただし次の事実を用いた:

- 上側の j^* は全射である. (初等的な事実)
- 下側の i^* は全単射である. (proper base-change theorem)
- 下側の j^* は単射である. (k の素元とのカップ積による切断がある)
- cl_{Y,ℓ^n} は全単射である. (加藤・齋藤 [KS])
- $\mathsf{cl}_{\mathscr{X},\ell^n}$ は全単射である. (定理 2)

系の主張はこれらの事実からただちに従う. □

系 8 $X \subset \mathbb{P}_k^N$ を k 上スムーズな完備交叉多様体 (complete intersection variety) とし, $\mathsf{dim}(X) \geq 2$ かつ X は k 上で良環元 (good reduction) をもつと仮定する. このとき任意の素数 $\ell \neq p$ に対して $\mathsf{A}_0(X)$ は ℓ 可除である.

証明. $\ell \neq p$ とし, $Y/\mathbb{F}$ を X の環元とする. 系 7 によって

$$\mathsf{CH}_0(X)/\ell \simeq \mathsf{CH}_0(Y)/\ell$$

であるから, $\mathsf{CH}_0(Y)/\ell \simeq \mathbb{Z}/\ell$ を示せばよい. 有限体上の多様体の不分岐類体論 [KS] によって

$$H^1(\overline{Y}, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \qquad (\overline{Y} := Y \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}})$$

を示せば十分である. エタールコホモロジーの proper smooth base-change theorem によって

$$H^1(\overline{Y}, \mathbb{Z}/\ell) \simeq H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell) \qquad (\overline{X} := X \otimes_k \overline{k})$$

であり, X に関する仮定から右辺は 0 なので, 系の主張が得られる. □

補足 9 系 8 において X が good reduction をもつという仮定は本質的である. 実際, 論文 [CTS] では $p \neq 3$ という仮定の下で, $\mathsf{A}_0(X) \simeq \mathbb{Z}/3$ あるいは $(\mathbb{Z}/3)^{\oplus 2}$ であるような p 進体 k 上の 3 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^3_k$ の例が挙げられているが, その例では X は good reduction を持たない. なお論文 [SS3] では同じ形の超曲面で $p = 3$ の場合を計算している.

参考文献

[AS] Asakura, M., Saito, S.: Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles. Algebra Number Theory **1**, 163–181 (2007)

[Ba] Bass, H.: Some problems in "classical" algebraic K-theory. In: *Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic, Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972,* (Lecture Notes in Math. 342), pp. 3–73, Springer, Berlin, 1973

[Be] Beilinson, A.: Higher regulators and values of L-functions. J. Soviet Math. **30**, 2036–2070 (1985)

[BKL] Bloch, S., Kas, A., Lieberman, D.: Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$. Compositio Math. **33**, 135–145 (1976)

[Ch] Chow, W.-L.: On equivalence classes of cycles in an algebraic variety. Ann. of Math. **64**, 450–479 (1956)

[CTR] Colliot-Thélène, J.-L., Raskind, W.: Groupe de Chow de codimension deux des variété sur un corps de numbres: Un théorème de finitude pour la torsion. Invent. Math. **105**, 221–245 (1991)

[CTS] Colliot-Thélène, J.-L., Saito, S.: Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer. Internat. Math. Res. Notices 1996, 151–160

[FG] Fujiwara, K.: A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In: Usui, S., Green, M., Illusie, L., Kato, K., Looijenga, E., Mukai, S., Saito, S. (eds.) *Algebraic Geometry, Azumino, 2001*, (Adv. Stud. in Pure Math. 36), pp. 153–184, Tokyo, Math. Soc. Japan, 2002

[Fu1] Fulton, W.: Rational equivalence on singular varieties. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **45**, 147–167 (1975)

[Fu2] Fulton, W.: *Intersection Theory. 2nd edition*. (Ergeb. der Math. und ihr. Grenzgeb. 3. Folge), Springer, Berlin, 1998

[Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*. (Grad. Texts in Math. 52), Springer, Berlin, 1977

[JS] Jannsen, U., Saito, S.: Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory. Documenta Math. Extra Volume: *Kazuya Kato's Fiftieth Birthday*, 479–538 (2003)

[dJ] de Jong, A. J.: Smoothness, semi-stability and alterations. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **83**, 51–93 (1996)

[KS] Kato, K., Saito, S.: Unramified class field theory for arithmetic surfaces. Ann. of Math. **118**, 241–274 (1983)

[Ma] Mattuck, M.: Abelian varieties over $\mathfrak{p}$-adic ground fields. Ann. of Math. **62**, 92–119 (1955)

[MS] Merkur'ev, A. S., Suslin, A. A.: K-cohomology of Severi-Brauer Varieties and the norm residue homomorphism. Math. USSR Izv. **21**, 307–340 (1983)

[Mu] Mumford, D.: Rational equivalence of 0-cycles on surfaces. J. Math. Kyoto Univ. **9**, 195–204 (1968)

[RS] Raskind, W., Spiess, M.: Milnor K-groups and zero-cycles on products of curves over p-adic fields. Compositio Math. **121**, 1–33 (2000)

[SS1] Saito, S., Sato, K.: A p-adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes. Documenta Math. Extra Volume: *Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday*, 525–594 (2010)

[SS2] Saito, S., Sato, K.: A finiteness theorem for zero-cycles over p-adic fields. Ann. of Math. **172**, 1593–1639 (2010)

[SS3] Saito, S., Sato, K.: Zero-cycles on varieties over p-adic fields and Brauer groups. `http://front.math.ucdavis.edu/0906.2273`

[SSu] Saito, S., Sujatha, R.: A finiteness theorem for cohomology of surfaces over p-adic fields and an application to Witt groups. In: Jacob, B. and Rosenberg, A. (eds.) *Algebraic K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with quadratic forms and division algebras, Santa Barbara 1992*, (Proc. of Sympos. Pure Math. 58, Part 2), pp. 403–416, Amer. Math. Soc., Providence, 1995.

[Y] Yamazaki, T.: On Chow and Brauer groups of a product of Mumford curves. Math. Ann. **333**, 549–567 (2005)